

Серия 5(b), откровенно комбинаторная.

1. Город Нью-Зулусск, экономический и культурный центр Зулусии, имеет в плане вид прямого угла, разделенного на кварталы улицами, параллельными одной его стороне (которая называется 0-й улицей) или проспектами, параллельными другой стороне (проспекту N0). Сколькими способами можно проехать от монумента “Медный Зулус” (который стоит на площади, в просторечии называемой “Два Нуля”) на угол m -ой улицы и n -го проспекта? (Двигаться можно в двух направлениях: вперед и вправо).

2. В языке племени БУМ-БУМ шесть букв, и все слова этого языка состоят из шести букв. Сколько можно составить слов, в которых есть хотя бы две одинаковые буквы?

3. В городе X имеется 1000 коттеджей, в каждом из которых живет по одному человеку. В один прекрасный день каждый человек переезжает из своего дома в какой-либо другой (переезд осуществляется так, что после него в каждом доме живет один жилец). Докажите, что после переезда можно так покрасить все 1000 коттеджей синей, зеленой и красной красками, чтобы у каждого хозяина цвет его нового дома отличался от цвета старого дома.

4. Имеются две страны: *Обычная* и *Зазеркалье*. У каждого города в *Обычной* стране есть “двойник” в *Зазеркалье*, и наоборот. Однако если в *Обычной* стране какие-то два города соединены железной дорогой, то в *Зазеркалье* эти города не соединены, а любые два несоединенных в *Обычной* стране города обязательно соединены железной дорогой в *Зазеркалье*. В *Обычной* стране девочка Алиса не может проехать из города A в город B , сделав менее двух пересадок. Докажите, что Алиса в *Зазеркалье* сможет проехать из любого города в любой другой, сделав не более двух пересадок.

5. Вождь выстроил 20 туземцев в ряд и иногда приказывает каким-нибудь двум туземцам, стоящим через одного, поменяться местами. Может ли он добиться того, чтобы они встали в обратном порядке?

6. Доказать, что уравнение $19x^3 - 17y^3 = 50$ не имеет решений в целых числах.

7. Найдите первые три цифры после запятой в десятичной записи частного от деления $0,123456789101112\dots495051$ на $0.515049\dots121110987654321$.

8. Вещественные числа a, b, c таковы, что $a + b + c = 0$. Докажите, что $ab + bc + ac \leq 0$.