Серия 5(а), небольшая напоследок

1. На прямой выбрано 100 множеств A_1, A_2, ..., A_{100}, каждое из которых является объединением 100 попарно непересекающихся отрезков. Докажите, что пересечение множеств A_1, A_2, ..., A_{100} является объединением не более 9901 попарно непересекающихся отрезков (точка также считается отрезком).

2. В компании из $2n+1$ человек для любых n человек найдется отличный от них человек, знакомый с каждым из них. Докажите, что в этой компании есть человек, знающий всех.

3. В некоторых клетках доски $2n \times 2n$ стоят черные и белые фишки. С доски сначала снимаются все черные фишки, которые стоят в одной вертикали с какой-то белой, а затем все белые фишки, стоящие в одной горизонтали с какой-нибудь из оставшихся черных. Докажите, что либо черных, либо белых фишек на доске осталось не более n^2.

4. Во всех рациональных точках действительной прямой расставлены целые числа. Докажите, что найдется такой отрезок, что сумма чисел на его концах не превосходит удвоенного числа в его середине.