

Серия 4(в), кэлоывмзиш8н авымдло.

1. Положим $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} + \frac{1}{100}$. Докажите, что а) $S > 1/5$; б) $S < 2/5$.
2. Докажите, что при любых $a, b \geq 0$ верно неравенство $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.
3. Натуральные числа x, y, z удовлетворяют уравнению $28x + 30y + 31z = 365$. Докажите, что $x + y + z = 12$.
4. а) Петя перемножил все натуральные числа от 1 до 100, а Вася перемножил сто одинаковых чисел 98. У кого получился больший результат?
б) А Коля перемножил сто одинаковых чисел 96. У кого результат больше, у него или у Пети?
5. $x_1 > x_2, y_1 > y_2$. Что больше: $x_1y_1 + x_2y_2$ или $x_1y_2 + x_2y_1$?
6. Докажите неравенство ДВА \times ШЕСТЬ $<$ ДВАДЦАТЬ. (Здесь каждая буква обозначает цифру, причем разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым – одинаковые.)
7. $A = (16a + 17b)(17a + 16b)$ делится на 11. Докажите, что A делится на 121.
8. Докажите следующие неравенства для положительных a, b, c :
 - а) $\frac{3}{a+b+c} \leq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c}$.
 - б) $a^2(1+b^2) + b^2(1+c^2) + c^2(1+a^2) \geq 6abc$.