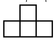
Серия 4(а): комбинаторное здоровое питание.

1. Квадрат 600×600 разбит на фигурки из 4 клеток в виде буквы T. В каждой из "'вертикально" расположенных фигурок (т.е. таких, у которых в одном столбце три клетки, в другом — одна) записано число 2^k, где k — номер столбца, в котором находится одна ее клетка. Докажите, что сумма всех записанных чисел делится на 9.

2. Докажите, что клетчатый прямоугольник $2004^2 \times 2^{2004}$ можно разрезать на прямоугольники 1×3 и фигурки вида  нечетным числом способов (фигурки можно поворачивать).

3. В группе из 100 человек у каждого имеет не менее 90 знакомых среди остальных. Докажите, что можно выбрать 10 человек, каждые двое из которых знакомы друг с другом.

4. В Однобоком графстве между некоторыми (но, к сожалению, еще не между всеми) усадьбами проложены дороги с односторонним движением. При этом при появлении любой новой дороги (также с односторонним движением) между усадьбами, не соединенными дорогой до этого, появится возможность добраться от любой усадьбы до любой другой, не нарушая правил. Докажите, что такая возможность имеется уже сейчас.

5. Стекло имеет форму квадрата площади 1. На обеих сторонах этого стекла нарисованы карты, по пять стран на каждой карте. Страны на одной стороне стекла закрашены пятью различными красками. Докажите, что можно закрасить страны на противоположной стороне стекла теми же пятью красками так, чтобы разные страны были закрашены разными красками, и общая площадь участков стекла, окрашенных с обеих сторон в один цвет, была не меньше $1/5$.

6. Из шахматной доски вырезан прямоугольник со сторонами, параллельными ее краям (стороны не обязательно идут по границам клеток). Докажите, что разность площадей белой и черной его частей не превосходит площади одной клетки.

7. На плоскости расположены n точек так, что любой треугольник с вершинами в этих точках имеет площадь не больше 1. Докажите, что все эти точки можно поместить в треугольник площади 4.

8. Докажите, что выпуклый 10-угольник нельзя разбить на треугольники и раскрасить их в два цвета так, что треугольники либо не имеют общих отрезков, либо имеют общую сторону (и тогда окрашены в разные цвета), причем к каждой стороне 10-угольника прилегает по одному черному треугольнику.

9. Прямоугольник $A \times B$ разбит на прямоугольники $1 \times N$. Докажите, что хотя бы одно из чисел A и B делится на N.