Серия 3(a), бодрящая

1. Решите систему уравнений: $(x+y)^3 = z$, $(z+y)^3 = x$, $(x+z)^3 = y$.

2. Из целых чисел от 1 до $3n$ выбрали $n+2$ каких-то чисел. Доказать, что при $n > 1$ среди выбранных чисел непременно найдутся два таких, разность между которыми больше n, но меньше $2n$.

3. Последовательность $\{n_k\}$ определена рекуррентно: n_0 – некоторое натуральное число, а при $k \geqslant 0$ n_{k+1} – сумма кубов цифр десятичной записи n_k. Докажите, что последовательность $\{n_k\}$ периодична.

4. 30 кружковцев Андрея Гриорьевича k раз делились на две команды и проводили матбой. На каждом матбое Алексей Сергеевич называл одну из команд хорошей. При каком наименьшем k он, как бы кружковцы ни делились, гарантированно мог сделать, чтобы каждый ребенок хоть раз побывал в хорошей команде?

5. 2014 школьников решали 6 задач. Оказалось, что в каждых трех работах можно найти решения по крайней мере 5 разных задач. Какое наименьшее количество решений могли сдать все школьники?

6. Функция $f(x)$ определена при каждом натуральном x условием $f(x) = y$, где $y! \leqslant x < (y+1)!$. Докажите, что $f(a^2) + f(b^2) \leqslant 2f(ab) + 1$ при всех натуральных a и b.

7. Пусть a и b – положительные числа такие, что $|a - 2b| \leqslant \frac{1}{\sqrt{a}}$ и $|2a - b| \leqslant \frac{1}{\sqrt{b}}$. Докажите, что $a + b \leqslant 2$.

8. Положительные числа a и b таковы, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. Докажите, что $(a+b)^n - a^n - b^n \geqslant 2^{2n} - 2^{n+1}$.