Серия 2(а), теперь арифметическая

1. Докажите, что уравнение $5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0$ не имеет решений в целых числах, отличных от 0.

2. Натуральные числа a, b и c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2$ делится на $a + b + c$. Докажите, что какие-то два из чисел a^3, b^3 и c^3 дают одинаковые остатки от деления на $a + b + c$.

3. Докажите, что при натуральном $m > 3$ $\sum\limits_{\substack{1 \leqslant x \leqslant m \\ x^2 - x + 1 \,\vdots\, m}} x$ делится на $m + 1$.

4. Пусть натуральные числа x, y, p, n и k таковы, что $x^n + y^n = p^k$. Докажите, что если число n ($n > 1$) нечетное, а число p нечетное простое, то n является степенью числа p (с натуральным показателем).

5. Найдите все пары (a, b) натуральных чисел такие, что при любом натуральном n число $a^n + b^n$ является точной $(n + 1)$-й степенью.

6. Натуральные числа u и v таковы, что для любого натурального k числа $ku+2$ и $kv+3$ имеют общий натуральный делитель, больший 1. Чему может быть равно отношение $\frac{u}{v}$?

7. m и n – натуральные числа, m нечетно. Докажите, что $(2^m - 1, 2^n + 1) = 1$.

8. Пусть p – простое число, большее 2. Докажите, что сумма остатков от деления чисел 1^p, 2^p, 3^p, $\ldots$, $(p-1)^p$ на p^2 равна $\frac{p^2(p-1)}{2}$.