

Серия 1(а): чуть-чуть алгебры.

1. Докажите, что если $0 < a < 1$ и $0 < b < 1$, то $\frac{ab(1-a)(1-b)}{(1-ab)^2} < \frac{1}{4}$.
2. a, b, c, d – вещественные числа такие, что $ad - bc = 1$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + cd \geq \sqrt{3}$.
3. Положительное вещественное число X таково, что $X^n = X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1$. Докажите, что $2 > X > 2 - \frac{1}{n}$.
4. Найдите геометрическое место вершин парабол, имеющих уравнения $y = -x^2 + bx + c$ и касающихся параболы $y = x^2$.
5. Известно, что $a^5 - a^3 + a = 2$. Докажите, что $3 < a^6 < 4$.
6. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} p = q(4 - q) \\ q = p(4 - p) \end{cases}$$
7. Положительные числа x, y таковы, что $y^3 + y \leq x - x^3$. Докажите, что $x^2 + y^2 \leq 1$.
8. Пусть $n > 2$ – целое число. Какая цифра стоит после запятой в десятичной записи числа $\sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + n}$?