

Вступительные задачи, 6 класс

1. Дано 19 чисел, причём для любых трёх из них можно выбрать два, одно из которых делится на другое. Докажите, что произведение каких-то десяти из этих чисел делится на произведение девяти оставшихся.
2. В классе 30 учеников, у каждого из которых ровно 5 друзей. Каждый день, если есть школьники, у которых осталось не менее трёх друзей, то одному из них придётся идти на лекцию об основах нравственности. После этого он ссорится с какими-то троими своими друзьями, считая их недостаточно нравственными. Докажите, что на эти лекции школьники вынуждены будут ходить не менее 15 дней.
3. По окружности расставлено 100 чисел. Оказалось, что каждое из этих чисел равно разности соседних (каждый раз из большего числа вычитают меньшее, либо число равно 0 и соседи равны). Докажите, что все числа равны нулю.
4. Докажите, что любое целое число, делящееся на 9, можно представить в виде разности двух чисел с одинаковой суммой цифр.
5. Натуральное число назовём *складным*, если его можно представить в виде суммы как четырёх, так и пяти последовательных натуральных чисел. Сколько существует складных четырехзначных чисел?
6. Дано несколько гирь, причем каждая гиря легче суммы остальных. Докажите, что эти гири можно разбить на 2 кучи таким образом, что суммарные веса в этих кучах отличаются не более чем вдвое.
7. Каждое натуральное число окрашено в синий или красный цвет таким образом, что есть и синие, и красные числа, а сумма любых трёх (не обязательно различных) чисел одного цвета имеет тот же самый цвет, что и эти три числа. Найдите все такие раскраски.
8. В нижнем левом углу доски 6×8 стоят 10 фишек. За один ход можно выбрать 2 фишки и одну сдвинуть на одну клетку вправо, а другую – на одну клетку вверх. Можно ли через несколько ходов все фишки собрать в верхней правой клетке доски?
9. На доске написано три различных шестизначных числа. Вася вычел из каждого из них число, образованное его первыми тремя цифрами, и полученные числа записал к себе в тетрадь. Могут ли у него в тетради оказаться три одинаковых числа?
10. 666 лжецов и рыцарей сидят за круглым столом (среди сидящих есть как рыцари, так и лжецы). На вопрос: "Сколько лжецов рядом с тобой?" все сказали: "Один". Сколько лжецов может сидеть за столом?