

Вступительные задачи, 7–8 классы

1. В карточной игре участвуют пятеро игроков. Всего имеется 24 игрока. Какое наибольшее количество игр они могут сыграть, если никакие двое не должны встречаться более, чем в одной игре?

2. Сумма любых двух из трех положительных чисел a, b, c больше 1. Докажите неравенство

$$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+c} + \frac{c}{1+a} > 1.$$

3. 100-значное число является квадратом натурального числа. Оказалось, что если отбросить его 2 последние цифры, то получится тоже квадрат натурального числа. Какие цифры могли быть отброшены?

4. В трёх кучках лежат 2009, 145 и 16 камней. За один ход разрешается объединить любые две кучки в одну или разделить одну кучку на три равных, если это возможно. Можно ли несколькими такими ходами получить 2170 кучек по одному камню в каждой?

5. Сколькими способами на доске 7×8 можно поставить 8 ладей так, чтобы каждая клетка доски была побита хотя бы одной ладьей?

6. a, b, c, d — натуральные числа, p — простое. Известно, что ab и $bc + ad$ делятся на p . Докажите, что bc делится на p .

7. Внутри треугольника ABC дана точка M . Докажите, что расстояние от точки M до какой-то из вершин не превосходит удвоенного расстояния от точки M до какой-то из середин сторон.

8. Внутри параллелограмма $ABCD$ с углом $\angle B = 105^\circ$ расположена точка M такая, что треугольник BMC — равносторонний и $\angle CMD = 135^\circ$. Точка K — середина стороны AB . Докажите, что $\angle BKC = 45^\circ$.

9. Натуральное число назовем сложным, если оно делится на квадрат любого своего простого делителя. Докажите, что существуют два последовательных сложных числа, больших чем 10^{10000} .

10. Числа a, b и c удовлетворяют условию $a + b + c \geq 3$. Докажите неравенство $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \geq 6$.