Вступительные задачи, 9–11 классы

1. Докажите, что существует бесконечно много чисел вида n^2+1, у которых нет делителей вида k^2+1, кроме самого числа (числа n и k – натуральные).

2. Дан треугольник ABC, в котором $AB+BC=2AC$. Точки M и N – середины сторон AB и BC соответственно. Докажите, что точка пересечения биссектрис углов AMN и CNM лежит на прямой AC.

3. Последовательность определена следующим образом: $a_1=1000000$, $a_{i+1}=a_i-2\sqrt{a_i}+1$ для всех натуральных i. Найдите a_{2010}.

4. В остроугольном треугольнике ABC с углом B, равным $60°$, биссектриса BL пересекается с высотой CD в точке S. Докажите, что $SH=SO$, где H и O – ортоцентр и центр описанной окружности треугольника ABC соответственно.

5. В стране 100 городов, соединенных 100 дорогами (два города может соединять только одна дорога). Всегда ли можно выбрать 50 городов так, чтобы каждая дорога начиналась или заканчивалась в одном из них?

6. Слово из $n>1$ букв можно разбить на несколько одинаковых кусков. Докажите, что если заменить первую букву другой, получившееся слово разбить таким образом не удастся.

7. Положительные числа a, b, c удовлетворяют уравнению $2a^2+b^2=9c^2$. Докажите, что $\frac{2c}{a}+\frac{c}{b}\geqslant\sqrt{3}$.

8. На доске 12×12 для игры в "морской бой" стоит один корабль в виде L-тетрамино (располагаться по клеткам он может любым способом). Какое наименьшее количество выстрелов нужно сделать по клеткам доски, чтобы заведомо попасть в корабль?

9. Первая цифра 3817-значного числа 9^{4000} равна 9. Сколько меньших степеней девятки также начинаются с 9?

10. Каждое натуральное число окрашено в один из k цветов. Докажите, что существуют четыре различных натуральных числа a, b, c, d одного цвета такие, что $ad=bc$, число b/a — степень двойки, а c/a — степень тройки (все степени — с натуральными показателями).