Серия 34, в которой много Эйлера.

1. Пусть $p > 2$ – простое число, a – квадратичный вычет $\bmod p$, b – квадратичный невычет $\bmod p$.

а) Докажите, что $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$.

б) Докажите, что ненулевые вычеты $\bmod p$ разбиваются на пары, произведение в которых сравнимо с $b \pmod p$.

в) Докажите, что $b^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p$.

2. Докажите, что существуют а) четыре, б) сто последовательных натуральных чисел, каждое из которых делится на квадрат натурального числа, большего 1.

3. Найдите все натуральные n, большие 1 и такие, что если $ab-1$ делится на n для каких-то натуральных чисел a и b, то и $a-b$ тоже делится на n.

4. Натуральное число n делится на 2 и на 9.

а) $d(n) = 14$. Докажите, что существует единственное такое n.

б) $d(n) = 15$. Докажите, что существует много таких n, и найдите их.

в) $d(n) = 17$. Докажите, что таких n не существует. (Напомним, что через $d(n)$ мы обозначаем количество натуральных делителей числа n.)

5. Докажите, что для любых натуральных a и b $\quad d(ab) \geqslant d(a) + d(b) - 1$.

6. Пусть $(a, b) = d$, $(a', b') = d'$. Докажите, что $(aa', ab', ba', bb') = dd'$.

7. а) Докажите, что если $(x, a) = 1$, $(y, b) = 1$ и $(a, b) = 1$, то существует целое n, для которого $n \equiv x \pmod a$, $n \equiv y \pmod b$ и $(n, ab) = 1$.

б) Выведите отсюда, что $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ при $(a, b) = 1$.

8. В классе N учеников, занумерованных натуральными числами от 1 до N. Числа p_1, p_2, …, p_k – все простые делители числа N. Кроме того, в классе работают k кружков, и i-й кружок посещают те и только те ученики, номер которых делится на p_i. Докажите, что количество учеников, которые не посещают ни одного кружка, равно $N\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$.