Серия 17. Биномиальные коэффициенты.

1. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 коня, 2 слона, 2 ладьи, ферзя и короля) на первой линии шахматной доски?

2. Три вершины выпуклого 100-угольника отмечены зеленым цветом. Докажите, что среди всех многоугольников, вершины которых являются вершинами этого 100-угольника, многоугольников, имеющих хотя бы одну зеленую вершину, более чем в 7 раз больше, чем многоугольников, не имеющих зеленых вершин.

3. Сколько существует пар множеств (A, B), для которых $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$?

4. Докажите, что $C_n^k = C_n^{n-k}$ для любых целых неотрицательных n и $k \leqslant n$,

а) алгебраическим способом;

б) с помощью комбинаторных рассуждений.

5. Город Нью-Зулусск, экономический и культурный центр Зулусии, имеет в плане вид прямого угла, разделенного на кварталы улицами, параллельными одной его стороне (которая называется 0-й улицей) или проспектами, параллельными другой стороне (проспекту №0). Сколькими способами можно проехать от монумента "Медный Зулус" (который стоит на площади, в просторечии называемой "Два Нуля") на угол m-ой улицы и n-го проспекта? (Двигаться можно в двух направлениях: вперед и вправо).

6. а) Докажите тождество $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ алгебраическим способом.

б) В кружке занимаются n человек, один из которых – хулиган Вася. Сколько существует способов назначить на дежурство k человек, среди которых есть Вася? А k человек, среди которых нет Васи?

в) Докажите тождество $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ комбинаторным способом.

7. а) Сколько слагаемых получится после раскрытия скобок в выражении $(a + b)^n$, если не приводить подобные члены?

б) А сколько среди них разных?

в) Докажите прямым раскрытием скобок *формулу степени бинома* $(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-2} a^2 b^{n-2} + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$.

г) Докажите эту же формулу индукцией по n.

8. а) На пиратском корабле трудятся 67 морских разбойников. У 47 из них есть ухо, у 35 – глаз, а у 23 счастливчиков есть и то, и другое. Сколько пиратов не имеют ни уха, ни глаза?

б) Новая инструкция Обкома Профсоюза Работников Абордажного Крюка предписывает корабельному врачу учитывать также наличие носа. В связи с этим дополнительно выяснилось, что 20 пиратов имеют нос, 12 – и нос, и ухо, 11 – и нос, и глаз, а 5 – все три органа. Сколько пиратов не имеют ничего?

в) В 8-а классе учатся N человек и действуют четыре кружка: 1) стрельбы из рогатки, 2) фенеплетения, 3) спиритизма и 4) дифференциальной геометрии. Опросив одноклассников, староста для каждого набора кружков узнал, сколько человек посещает все эти кружки одновременно, и обозначил это количество буквой N с индексами, соответствующими номерам кружков. Так, в третий кружок ходят N_3 человек, а одновременно в первый, второй и четвертый – N_{124}. Докажите, что количество учеников, не занимающихся ни в одном кружке, равно

$$N_0 = N - N_1 - N_2 - N_3 - N_4 + N_{12} + N_{13} + N_{14} + N_{23} + N_{24} + N_{34} - N_{123} - N_{124} - N_{134} - N_{234} + N_{1234}.$$