

Серия 11. Основная теорема арифметики.

1. Написанное на доске число можно умножить или разделить на $\frac{5}{6}$ или $\frac{9}{10}$. Можно ли из 1 получить другое целое число?
2. Можно ли разбить все числа от 1 до 32 на несколько групп с одинаковым произведением?
3. О натуральных числах a и b известно, что $an + 1$ делится на $bn + 1$ при любом натуральном n . Докажите, что $a = b$.
4. Даны простые числа p и q и натуральные числа x и y , причем $x < p$ и $y < q$. Докажите, что если число $\frac{p}{x} + \frac{q}{y}$ целое, то $x = y$.
5. Решите уравнение $x^2 = 2y^2$ в натуральных числах.
6. a и b – натуральные числа такие, что $43a = 34b$. Докажите, что число $a + b$ – составное.
7. На доске написаны натуральные числа 1, 2, 3, ..., 10. Разрешается выписать число a^2 , если на доске уже имеется число a , или выписать наименьшее общее кратное чисел a и b , если числа a и b уже записаны. Можно ли с помощью таких операций получить число 1 000 000?