Серия 5(b), с примесью комбинаторной геометрии

1. n школьников занимаются в кружках. В каждом кружке состоят ровно 5 человек. Для любых двух школьников существует не более одного кружка, в котором занимаются они оба. Докажите, что количество кружков не более $\frac{n^2}{20}$.

2. Несколько точек расположены на плоскости так, что площадь любого треугольника с вершинами в этих точках меньше 1. Докажите, что все эти точки можно поместить в треугольник площади 4.

3. В круг радиуса 3 поместили несколько кругов с суммой радиусов 25. Докажите, что найдется прямая, пересекающая не менее 9 из них.

4. Клетки прямоугольника 5×41 раскрашены в два цвета. Докажите, что можно выбрать три строки и три столбца так что все девять клеток, находящиеся на их пересечении, будут иметь один цвет.

5. Плоскость разбита на части $2n$ прямыми ($n > 1$), никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаюгся в одной точке. Докажите, что среди этих частей не более $2n-1$ углов.

6. В школе работает несколько кружков, в каждом не более 10 учеников. Известно, что у любых 11 кружков есть общий участник. Докажите, что есть ученик, который участвует во всех кружках.

7. Дано 1978 множеств, каждое из которых имеет по 40 элементов. Известно, что любые два из этих множеств имеют ровно один общий элемент. Докажите, что существует элемент, принадлежащий всем 1978 множествам.

8. В стране провели анкету, в которой требовалось назвать любимого писателя, художника и композитора. Оказалось,что каждый упомянутый хоть раз деятель искусств является любимым ровно k людьми. Докажите, что всех проанкетированных можно разделить на $3k-2$ группы так, что в каждой группе любые два человека имеют совершенно разные вкусы.