**Серия 5(а): и наконец.**

1. Пусть $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, $x_i + y_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Докажите, что $(1 - x_1 x_2 \ldots x_n)^m + (1 - y_1^m)(1 - y_2^m) \ldots (1 - y_n^m) \geqslant 1$ для любых натуральных $m$ и $n$.

2. Назовем тройку положительных чисел $(a, b, c)$ *удобной*, если система неравенств $ax^2 < bx + c$, $bx^2 < cx + a$, $cx^2 < ax + b$ имеет ровно два целых решения. Докажите, что тройка $(a, b, c)$ удобна тогда и только тогда, когда $a$, $b$, $c$ — длины сторон некоторого треугольника.

3. Найдите все такие пары натуральных чисел $n$, $k$, что $n > 1$, $k$ — нечетно, и $(n-1)! + 1 = n^k$.

4. Функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на всей вещественной оси и принимают вещественные значения. Для любых вещественных $x$ и $y$ выполнено равенство $f(x + g(y)) = 2x + y + 5$. Найдите функцию $g(x + f(y))$ (выразите явно через $x$ и $y$).

5. Вещественные числа $a, b, c, x, y, z$ таковы, что $a^x = bc$, $b^y = ca$, $c^z = ab$, причем числа $a, b, c$ положительны и хотя бы одно из них не равно 1. Докажите, что $x + y + z - xyz$ – целое число.

6. Рассматриваются 2000 чисел: 11, 101, 1001, … Докажите, что среди этих чисел не менее 99% составных.