

### Серия 4(с). Индукция.

1. Докажите, что  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ .
2. На плоскости лежат  $n$  прямых, разбивающих ее на части. Докажите, что эти части можно закрасить в 2 цвета правильным образом, то есть так, чтобы любые две части, граничащие по отрезку, были закрашены в разные цвета.
3. Выпуклый  $n$ -угольник разрезан непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что хотя бы один из этих треугольников содержит две стороны  $n$ -угольника.
4. Если  $n$ -угольник, где  $n \geq 4$ , разрезан не пересекающимися внутри  $n$ -угольника диагоналями на треугольники, то среди этих треугольников встречаются такие, которые имеют с многоугольником две общие стороны, одну общую сторону или ни одной – пусть их количества соответственно  $a_2, a_1, a_0$ . Докажите, что  $2a_2 + a_1 = n$ .
5. По кругу записаны 2019 натуральных чисел так, что из любых двух соседних чисел одно кратно другому. Докажите, что на окружности найдется пара и не соседних чисел с таким свойством.
6. Город Нью-Зулусск, экономический и культурный центр Зулусии, имеет в плане вид прямого угла, разделенного на кварталы улицами, параллельными одной его стороне (которая называется 0-й улицей) или проспектами, параллельными другой стороне (проспекту №0). Сколькими способами можно проехать от монумента “Медный Зулус” (который стоит на площади, в просторечии называемой “Два Нуля”) на угол  $m$ -ой улицы и  $n$ -го проспекта? (Двигаться можно в двух направлениях: вперед и вправо).
7. На главной диагонали шашечной доски  $10 \times 10$  стоит десять шашек (все в разных клетках). За один ход разрешается выбрать любую пару шашек и передвинуть каждую из них на одну клетку вниз. Можно ли за несколько таких ходов поставить все шашки на нижнюю горизонталь?
8. Двое по очереди ставят ладей на шахматную доску так, чтобы ладьи не били друг друга. Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?