

### Серия 4(б), в которой появляются числа.

1. В городе  $X$  имеется 1000 коттеджей, в каждом из которых живет по одному человеку. В один прекрасный день каждый человек переезжает из своего дома в какой-либо другой (переезд осуществляется так, что после него в каждом доме живет один жилец). Докажите, что после переезда можно так покрасить все 1000 коттеджей синей, зеленой и красной красками, чтобы у каждого хозяина цвет его нового дома отличался от цвета старого дома.

2. Имеются две страны: *Обычная* и *Зазеркалье*. У каждого города в *Обычной* стране есть "двойник" в *Зазеркалье*, и наоборот. Однако если в *Обычной* стране какие-то два города соединены железной дорогой, то в *Зазеркалье* эти города не соединены, а любые два несоединенных в *Обычной* стране города обязательно соединены железной дорогой в *Зазеркалье*. В *Обычной* стране девочка Алиса не может проехать из города  $A$  в город  $B$ , сделав менее двух пересадок. Докажите, что Алиса в *Зазеркалье* сможет проехать из любого города в любой другой, сделав не более двух пересадок.

3. В городе  $n + 1$  площадь ( $n$  на окружности и одна в ее центре) и  $2n$  дорог ( $n$  идущих по окружности и  $n$  радиальных). На каждой дороге введено одностороннее движение таким образом, что на любую площадь можно въехать и с любой площади можно выехать. Докажите, что с любой из площадей можно проехать на любую.

4. Кучка из 25 камней произвольным образом делится на две кучки, любая из имеющихся кучек снова делится на две и т. д., пока каждая кучка не будет состоять из одного камня. При каждом делении какой-либо кучки на две записывается произведение чисел камней в получающихся двух кучках. Докажите, что сумма всех записанных чисел равна 300.

5. а) Федеративная Республика АБ состоит из двух федеральных земель – А и Б, и дороги в этой стране соединяют только города из разных земель. Докажите, что любой замкнутый туристический маршрут по стране проходит через четное число городов.

б) Города страны ВГ соединены дорогами так, что любой замкнутый маршрут в этой стране проходит через четное число городов. Докажите, что страну можно разделить на республики В и Г так, что дороги будут соединять только города из разных республик.

6. По кругу расставлены натуральные числа. Между каждыми двумя числами выписывают их наибольший общий делитель, а затем все старые числа стирают. Докажите, что через несколько шагов все числа станут равны.

7.  $x_1 > x_2$ ,  $y_1 > y_2$ . Что больше:  $x_1 y_1 + x_2 y_2$  или  $x_1 y_2 + x_2 y_1$ ?

8. Числа  $a$  и  $b$  – одного знака. Докажите, что уравнение  $a/x + b/(x - 1) = 1$  имеет корень.