Серия 4(а): теперь в 3D!

1. Назовем прямую, проходящую через середины скрещивающихся ребер тетраэдра, *хорошей* средней линией тетраэдра, если она образует равные углы с четырьмя прямыми, содержащими остальные ребра тетраэдра. Докажите, что тетраэдр правильный, если хотя бы две его средние линии хорошие.

2. Ортогональные проекции на плоскости всех граней треугольной пирамиды отрезка, соединяющего середины его противоположных ребер, имеют равные длины. Докажите, что таким же свойством обладает и любой из двух других отрезков, соединяющих середины противоположных ребер пирамиды.

3. В пространстве даны 4 попарно не пересекающиеся прямые. Известно, что любая плоскость, не параллельная ни одной из этих прямых, пересекает их в четырех точках, являющихся вершинами параллелограмма. Докажите, что данные прямые параллельны.

4. Внутри треугольника с вершинами в узлах целочисленной решетки находится ровно один узел. Какое наибольшее количество узлов может лежать на сторонах треугольника (включая вершины треугольника)?

5. Найдите все последовательности (x_n) такие, что $x_n = \sin x_{n+1}$ при всех $n \geqslant 1$.

6. На шахматную доску размером $(2n-1)\times(2n-1)$ поставили $(2n-1)$ ладью так, что ни одна из них не бьет другую. Докажите, что в любом квадрате $n \times n$ стоит хотя бы одна ладья.

7. Каждый из узлов бесконечного клетчатого листа бумаги раскрашен в один из двух цветов. Докажите, что существует бесконечное одноцветное множество узлов, имеющее центр симметрии.

8. В каждой клетке прямоугольной таблицы стоит неотрицательное число, причём нет ни строк, ни столбцов, состоящих из одних нулей. Известно также, что суммы чисел в любом столбце и любой строке, на пересечении которых стоит положительное число, равны. Докажите, что таблица – квадратная.