Серия 3(b): ещё несколько сюжетов.

1. Докажите, что $[x+\frac{1}{2}]=[2x]-[x]$.

2. Докажите, что для любого действительного α и натурального n $\left[\frac{[\alpha]}{n}\right]=\left[\frac{\alpha}{n}\right]$.

3. В графстве n усадеб, каждые две из которых соединены дорогой. Эксцентричный джентльмен, которого назначили начальником ГАИ графства, решил установить на всех дорогах одностороннее движение так, чтобы, выехав из какой-либо усадьбы, в нее больше нельзя было вернуться. а) Докажите, что он может это сделать. б) Сколькими способами он может это сделать?

4. Внутри квадрата отметили 5 точек и разбили квадрат на треугольники с вершинами в отмеченных точках и вершинах квадрата. Сколько было треугольников?

5. На кольцевом шоссе стоят несколько автомобилей с общим запасом бензина, достаточным, чтобы объехать весь круг. Докажите, что можно сесть в одну машину и объехать все кольцо, забирая по дороге бензин у остальных автомобилей.

6. В странах Диллии и Даллии денежными единицами являются диллеры и даллеры соответственно, причем в Диллии диллер меняется на 10 даллеров, а в Даллии даллер меняется на 10 диллеров. Начинающий финансист имеет 1 диллер и может свободно переезжать из одной страны в другую и менять свои деньги в обеих странах. Докажите, что количество даллеров у него никогда не сравняется с количеством диллеров.

7. а) Докажите, что у каждого натурального числа существует кратное, записываемое (в десятичной системе) только единицами и нулями.

б) Докажите, что у каждого натурального числа, которое не делится ни на 2, ни на 5, существует кратное, записываемое только единицами.

8. На сторонах некоторого многоугольника расставлены стрелки. Докажите, что число вершин, в которые входят две стрелки, равно числу вершин, из которых выходят две стрелки.