Серия 3(а): хчл.

1. В стране 2000 городов, каждые два из которых соединены дорогой. Строительные организации представили все возможные проекты введения одностороннего движения на всех дорогах. Министерство транспорта отвергло все проекты, не обеспечивавшие возможности добраться из любого города в любой другой. Докажите, что все же осталось более половины проектов.

2. В каком наибольшем числе различных целых точек квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$, у которого $a > 100$, может принимать значения, по модулю не превосходящие 50?

3. Существуют ли такие 2019 квадратных трехчленов, что сумма всех 2019 трехчленов имеет корни, а сумма любого меньшего числа этих трехчленов корней не имеет?

4. Даны три квадратных трехчлена: $P_1(x) = x^2 + p_1x + q_1$, $P_2(x) = x^2 + p_2x + q_2$ и $P_3(x) = x^2 + p_3x + q_3$. Докажите, что уравнение $|P_1(x)| + |P_2(x)| = |P_3(x)|$ имеет не более восьми корней.

5. Учитель написал на доске квадратный трехчлен $x^2 + 10x + 20$. Затем каждый ученик по очереди увеличивал или уменьшал на 1 по своему выбору один из младших коэффициентов (коэффициент при x или свободный член), но не оба сразу. В результате получился трехчлен $x^2 + 20x + 10$. Верно ли, что в некоторый момент на доске был написан квадратный трехчлен с целыми корнями?

6. Если в квадратном трехчлене заменить любой из коэффициентов на 1, получившийся трехчлен будет иметь корень. Докажите, что исходный трехчлен в какой-нибудь точке принимал отрицательное значение.

7. Известно, что $a^5 - a^3 + a = 2$. Докажите, что $3 < a^6 < 4$.