Серия 2(a), комбинаторно–общеобразовательная

1. В стране Мара расположено несколько замков. Из каждого замка ведут три дороги. Из какого-то замка выехал рыцарь. Странствуя по дорогам, он из каждого замка, лежащего на его пути, поворачивает либо направо, либо налево по отношению к дороге, по которой приехал. Рыцарь никогда не сворачивает в ту сторону, в которую он свернул перед этим. Докажите, что он когда-нибудь вернется в свой замок.

2. В клетках таблицы $n \times n$ расставлены ладьи. Известно, что, если на какой-нибудь клетке ладьи нет, то на клетках, стоящих по вертикали и по горизонтали, которые содержат эту клетку, стоит (всего) не менее n ладей. Докажите, что общее число ладей в таблице не менее $\frac{n^2}{2}$.

3. Задано несколько точек, соединенных отрезками двух цветов: некоторые пары точек – голубыми отрезками, некоторые другие – красными. Известно, что в любом замкнутом пути, состоящем из нескольких отрезков, число красных отрезков четно. Докажите, что все точки можно разбить на два множества так, что каждый красный отрезок соединяет точки из разных множеств, а каждый голубой – точки из одного и того же множества.

4. Король Людовик не доверяет некоторым своим придворным. Он составил полный список придворных и приказал каждому из них следить за одним из остальных. При этом первый придворный следит за тем, кто следит за вторым, второй следит за тем, кто следит за третьим и т.д., предпоследний следит за тем, кто следит за последним, последний следит за тем, кто следит за первым. Докажите, что у Людовика нечетное число придворных.

5. В некотором множестве M выделено несколько попарно пересекающихся подмножеств (это значит, что пересечение любых двух из выделенных подмножеств является непустым множеством). Пусть A – некоторое подмножество множества M. Докажите, что либо подмножество A, либо дополнение этого подмножества до множества M пересекается с каждым подмножеством из выделенного семейства.

6. Какое наибольшее число клеток клетчатого квадрата $(2n-1) \times (2n-1)$ можно закрасить так, чтобы никакие три закрашенные клетки не образовывали уголок из трёх клеток?

7. Шахматную доску разбили на двухклеточные прямоугольники 1×2. Каждый из них требуется закрасить каким-нибудь цветом так, чтобы любые две клетки доски, отстоящие на ход коня, были раскрашены в разные цвета. Какого наименьшего числа цветов заведомо хватит для этого?

8. Может ли ладья обойти все клетки доски 10×10, побывав на каждой клетке ровно по разу, чередуя ходы длиной в одну и в две клетки? (Считается, что, делая ход длиной в две клетки, ладья не проходит по промежуточной клетке.)