Серия 1(с), скорее комбинаторная

1. Можно ли покрыть всю плоскость квадратами, среди которых всего два одинаковых?

2. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 6 не бьющих друг друга ладей?

3. В ряд стоят 30 сапог: 15 левых и 15 правых. Докажите, что среди некоторых десяти подряд стоящих сапог левых и правых поровну.

4. На доске было написано 5 чисел. Сложив их попарно, получили следующие 10 чисел: 0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15. Какие числа были написаны?

5. Сравнив дроби $x = \frac{111110}{111111}$, $y = \frac{222221}{222223}$, $z = \frac{333331}{333334}$, расположите их в порядке возрастания.

6. На доске в лаборатории написаны два числа. Каждый день старший научный сотрудник Петя стирает с доски оба числа и пишет вместо них их среднее арифметическое и среднее гармоническое. Утром первого дня на доске были написаны числа 1 и 2. Найдите произведение чисел, записанных на доске вечером 1999-го дня. (Средним арифметическим двух чисел a и b называется число $\frac{a+b}{2}$, а средним гармоническим – число $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$).

7. На доске выписано несколько положительных вещественных чисел. Докажите, что среди них найдется такое, для которого среди выписанных нет ни втрое большего числа, ни вдвое меньшего.

8. В стране конечное число городов. Они связаны дорогами с односторонним движением. Известно, что для любых двух городов от одного можно добраться до другого. Доказать, что найдется город, из которого можно добраться до всех остальных.