

Серия 1(б): графы, экспресс-курс.

1. В некоторой компании более 10 человек, и у каждого количество знакомых делится на 10. Докажите, что есть хотя бы 11 человек с одинаковым количеством знакомых.
2. k и n – натуральные числа, большие 1. В группе из kn человек каждый знаком более, чем с $(k-1)n$ из остальных. Докажите, что можно выбрать $k+1$ человека так, что все они знакомы друг с другом.
3. В селе Ивановском живут $n > 100$ человек. Житель села называется общительным, если у него не менее 100 знакомых среди односельчан. Докажите, что в Ивановском найдутся либо два знакомых между собой общительных жителя, либо два незнакомых между собой необщительных жителя.
4. В графстве Липшир между усадьбами любых двух из 100 джентльменов имеется либо водное сообщение (на лодочке), либо сухопутное (каретой). Не исключаются оба варианта. Докажите, что можно упразднить один из видов транспорта так, чтобы из любой усадьбы можно было проехать в любую другую (возможно, с пересадками).
5. В графе 2009 вершин, и каждая вершина имеет степень 4. На каждом ребре этого графа поставили стрелочку. Докажите, что найдётся вершина, в которую входит чётное число стрелок.
6. В некоторой стране есть столица и еще 100 городов. Некоторые города (в том числе столица) соединены дорогами с односторонним движением. Из каждого нестоличного города выходит 20 дорог, и в каждый такой город входит 21 дорога. Докажите, что в столицу нельзя проехать ни из одного города.
7. В стране несколько городов и один из них является столицей. Из столицы выходит 100 дорог, а из всех остальных городов – по 10. При этом из любого города можно доехать до любого другого. Докажите, что можно закрыть на ремонт половину дорог, идущих из столицы так, чтобы это условие сохранилось.
8. Найдите количество способов раздать каждому из 2019 детей по одной, две или три конфеты так, чтобы общее количество конфет делилось на три.