

Серия 1(а): бодрящая комбинаторика.

1. В “Большой энциклопедии кроликов” 10 томов. Они стоят на полке почти по порядку: каждый том стоит либо на своем месте, либо на соседнем. Сколько таких расположений возможно?
2. Докажите, что шахматный конь не может обойти доску $4 \times n$, побывав в каждой клетке ровно по одному разу, и вернуться в исходную точку.
3. Последовательность натуральных чисел $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n \dots$ такова, что каждое натуральное число либо входит в эту последовательность, либо представляется в виде суммы двух её членов, быть может, одинаковых. Докажите, что $a_n \leq n^2$ для всех натуральных n .
4. N точек соединены друг с другом некоторым количеством отрезков; из каждой точки выходит не более 11 отрезков. Докажите, что точки можно покрасить в 4 цвета так, чтобы отрезков с одноцветными концами было не более N .
5. В сенате 30 сенаторов. Каждые два из них либо дружат, либо враждуют. Каждый сенатор враждует ровно с шестью другими. Каждые три сенатора образуют комиссию. Найдите общее число таких комиссий, в которых все три члена попарно дружат, либо все три попарно враждуют.
6. В международном обществе состоят 1985 членов. Среди любых трех из них есть по крайней мере двое говорящих на одном языке. Докажите, что если каждый член общества говорит не более чем на 5 языках, то существуют по крайней мере 200 человек, говорящих на одном и том же языке.
7. На танцевальном вечере в школе ни один мальчик не танцевал со всеми девочками, но каждая девочка танцевала по крайней мере с одним мальчиком. Докажите, что найдутся две такие пары M_1, D_1 и M_2, D_2 , что мальчик M_1 танцевал с девочкой D_1 , а мальчик M_2 – с девочкой D_2 , но M_1 не танцевал с D_2 , а M_2 не танцевал с D_1 .
8. Докажите, что A является максимальным по количеству вершин независимым множеством в графе на множестве вершин V , то есть множеством, никакие две вершины которого не соединены ребром, тогда и только тогда, когда для любого независимого подмножества $B \subset V \setminus A$ множество ΔB вершин A , соединенных с вершинами B , содержит не меньше элементов, чем B .