Вступительные задачи, 8–9 классы

1. BH – высота, а BM – медиана остроугольного треугольника ABC, в котором $BC > AB$. На стороне AC выбрана точка L таким образом, что $CL = 2HM$. Докажите, что $AB = BL$.

2. У мальчика Васи в его классе 8 друзей и 11 подруг. Каждый из его друзей дружит с 10 одноклассницами. Для каждых двух мальчиков любая девочка в классе дружит хотя бы с одним из них. Сколько девочек может быть в этом классе?

3. Найдите все натуральные n, для которых $n! + 3n^2$ – квадрат натурального числа.

4. Докажите, что если a, b, c – натуральные числа такие, что $3a + 1004b + 2006c = 0$, то число $N = 2ac - 3a^2$ делится на 2008.

5. Целые числа x и y удовлетворяют условию $9x^2 + 6xy - 6y^2 = x - y$. Докажите, что число $x - y$ – квадрат целого числа.

6. В графстве Липшир некоторые джентльмены знакомы друг с другом. Однако никакие два джентльмена, у которых поровну знакомых, общих знакомых не имеют. Докажите, что есть джентльмен, у которого ровно один знакомый.

7. Можно ли составить замкнутое ожерелье из 100 бусинок – красных, синих и зеленых, так, чтобы между любыми двумя красными бусинками была хотя бы одна синяя, между любыми двумя синими – зеленая, между любыми двумя зелеными – красная?

8. В таблице $2n \times 2n$ расставлены натуральные числа, не превосходящие 10. Известно, что числа, расположенные в клетках, имеющих общую сторону или вершину, взаимно просты. Докажите, что какое-то число встречается в таблице не менее чем $2n^2/3$ раз.

9. Каждая из 100 девушек послала одному или нескольким из 100 юношей свою фотографию. Всего было послано больше 100 фотографий. Докажите, что какой-то из юношей может выкинуть все полученные им фотографии, но при этом фотография каждой девушки останется у кого-либо из остальных юношей.

10. На доске написаны натуральные числа p и q. Разрешается увеличивать оба числа на 1, либо, если одно из чисел является точным квадратом, извлечь из него корень. При каких исходных p и q можно несколькими такими операциями добиться, чтобы числа стали равными?