Вступительные задачи, 10–11 классы

1. Пусть $n \geqslant 3$ – натуральное число, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – положительные числа, удовлетворяющие равенствам

$$x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2 = \ldots = x_{n-1}^2 - x_{n-1}x_n + x_n^2 = x_n^2 - x_nx_1 + x_1^2.$$

При каких n можно утверждать, что числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равны?

2. Один треугольник лежит внутри другого. Докажите, что хотя бы одна из двух наименьших сторон (из шести) является стороной внутреннего треугольника.

3. Найдите все такие простые числа p вида $a^2 + b^2 + c^2$ (где a, b, c – натуральные), что $a^4 + b^4 + c^4$ делится на p.

4. Рассмотрим последовательности, состоящие из 3000 цифр 1 и 2. В такой последовательности разрешается менять местами любые две соседние тройки цифр. Две последовательности называются эквивалентными, если одну из них можно перевести в другую несколькими такими перестановками. Сколько всего существует неэквивалентных последовательностей?

5. Положительные числа x, y таковы, что $y^3 + y \leqslant x - x^3$. Докажите, что $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

6. Положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ $(n > 2)$ удовлетворяют условиям $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$, $b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 = 1$. Докажите, что $a_1(b_1 + a_2) + a_2(b_2 + a_3) + \ldots + a_n(b_n + a_1) < 1$.

7. Положительные числа x и y удовлетворяют условию $(1 + x)(1 + y) = 2$. Докажите, что $xy + \frac{1}{xy} \geqslant 6$.

8. Обозначим через $p(n, k)$ количество делителей числа n, не меньших, чем k. Чему равна сумма $p(1001, 1) + p(1002, 2) + p(1003, 3) + \ldots + p(2000, 1000)$?

9. Натуральные числа p и q таковы, что $p \geqslant q$. У ослика Иа-Иа есть pq палочек, из которых он может составить p q-угольников. Докажите, что из этих же палочек Иа-Иа может составить q p-угольников.

10. Существует ли бесконечная последовательность простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ такая, что $|p_{n+1} - 2p_n| = 1$ для каждого натурального n?