Серия 5, заключительная.

1. Для простого числа p нашлось такое целое число x, что x^2+x+3 делится на p. Докажите, что найдется целое число y, для которого y^2+y+25 делится на p.

2. Натуральные n, m, k таковы, что числа 5^n-2 и 2^k-5 делятся на 5^m-2^m. Докажите, что n и m взаимно просты.

3. На однокруговой шахматный турнир приехало n шахматистов из страны A и n шахматистов из страны B. Оказалось, что как бы ни разбить шахматистов на пары (чтобы друг с другом играли шахматисты разных стран), найдется хотя бы одна пара шахматистов, которые уже встречались ранее друг с другом. Докажите, что можно выбрать a шахматистов из страны A и b шахматистов из страны B так, что каждый из выбранных a шахматистов встречался с каждым из выбранных b шахматистов, а $a+b>n$.

4. Сколько пар целых чисел $(x;y)$ удовлетворяет системе неравенств $\begin{cases} 2x\geqslant 3y, \\ 3x\geqslant 4y, \\ 5x-7y\leqslant 20 \end{cases}$?

5. Последовательность (x_n) задана своими первыми двумя членами $x_1\neq 0$, $x_2\neq 0$ и условием $x_{n+1}=kx_n-x_{n-1}$. Имеет ли период эта последовательность, если: а) $k=\sqrt{2}$; б) $k=\sqrt{3}$; в) $k=(\sqrt{5}+1)/2$; г) $k=\frac{3}{2}$?

6. Простое число p обладает свойством: для всех целых a и b последовательность, заданная условиями $x_1=a$, $x_2=b$ и $x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$ при $n\geqslant 1$, содержит член, кратный p. Последовательность чисел Фибоначчи задаётся соотношениями $F_1=F_2=1$ и $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ при $n\geqslant 1$. Докажите, что F_{p+1} делится на p.

7. Пусть a, b, c, d – такие целые числа, что система уравнений $ax+by=m$, $cx+dy=n$ при любых целых m и n имеет решение в целых числах. Докажите, что $ad-bc=\pm 1$.

8. Вершины правильного 1526-угольника суть точки P_1, P_2, ..., P_{1526} в некотором порядке. Докажите, что у ломаной $P_1P_2P_3\ldots P_{1526}P_1$ есть два параллельных звена.

9. Дано натуральное n. Найдите количество последовательностей a_0, a_1, a_2, ..., a_k, все члены которых равны 0, 1, 2 или 3, таких, что $n=a_0+2a_1+2^2a_2+\ldots+2^ka_k$.