Серия 4, с разбиениями.

1. Дано нечётное натуральное число n. На доске выписаны в порядке возрастания все остатки, которые могут давать степени 2 при делении на n. (Например, при $n = 9$ на доске были бы написаны числа 1, 2, 4, 5, 7, 8.) Всегда ли по этим числам можно определить n?

2. Пусть p_n – число разбиений натурального n на натуральные слагаемые (разбиения, отличающиеся порядком, мы будем считать одинаковыми; так, $4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$, следовательно, $p_4 = 5$). Докажите *теорему Эйлера*: производящая функция для числа разбиений числа n имеет вид $p(x) = \sum p_n x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots}$

3. Докажите, что число разбиений натурального N на слагаемые, не превосходящие k, равно числу разбиений N на не более чем k слагаемых.

4. (Эйлер) Докажите, что число разбиений n на различные слагаемые равно числу разбиений n на нечётные, но не обязательно различные слагаемые.

5. Квадрат двумя способами разбит на 100 равновеликих прямоугольников. Докажите, что в нем можно отметить 100 точек так, что в каждом из прямоугольников обоих разбиений будет лежать ровно одна точка.

6. На доске написаны n цифр в ряд. Докажите, что к ним можно приписать несколько цифр слева и не более n цифр справа так, чтобы получилась степень двойки.

7. n участников конференции уселись на n мест за круглым столом, не обратив внимания на таблички с именами, уже стоявшие на этих местах. При каких n стол наверняка удастся повернуть так, чтобы никто не оказался на своем месте?

8. Докажите, что любой многочлен с вещественными коэффициентами является разностным многочленом некоторого многочлена.