





Серия 3, техническая.

1. Докажите, что если x , y и z – различные целые числа, а n – неотрицательное целое число, то $\frac{x^n}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^n}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^n}{(z-x)(z-y)}$ – целое число.

2. Для натурального a обозначим через $P(a)$ наибольший простой делитель числа a^2+1 . Докажите, что существует бесконечно много троек различных натуральных чисел a , b , c таких, что $P(a) = P(b) = P(c)$.

3. Докажите, что существует бесконечно много простых p , при делении на которые точные квадраты могут давать остаток 2024.

4. Квадрат 600×600 разбит на фигурки из 4 клеток вида , , , . В фигурках первых двух типов в закрашенных клетках записано число 2^k , где k — номер столбца, в котором находится эта клетка. Докажите, что сумма всех записанных чисел делится на 9.

5. (Гаусс, Disquisitiones Arithmeticae, art.78, также известно под названием ”обобщенной теоремы Вильсона”) а) Докажите, что произведение всех элементов приведенной системы вычетов по модулю m сравнимо с ± 1 по модулю m , и б) установите, какой знак соответствует каждому m .

6. Число $1/1997$ представили в виде периодической десятичной дроби. Докажите, что в (наименьшем) периоде этой дроби не более 200 семерок.

7. Дана бесконечная десятичная дробь, причем после запятой у нее встречаются только цифры 0, 1, 2. Известно, что если все цифры 0 заменить на 1, то получится периодическая десятичная дробь (возможно, с предпериодом), и если все цифры 1 заменить на 2, то тоже получится периодическая десятичная дробь. Следует ли отсюда, что исходная дробь периодическая?

8. Последовательность a_1, a_2, a_3, \dots задается правилами: $a_{2n} = a_n$ при $n \geq 1$ и $a_{4n+1} = 1, a_{4n+3} = 0$ при $n \geq 0$. Докажите, что эта последовательность не имеет периода.