Серия 2: всё, о чём мы говорили.

1. На клетках таблицы 4×4, кроме правой нижней, расставлены (слева направо в строчках и сверху вниз) квадратики с написанными на них числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 14. Разрешается передвинуть на свободную клетку квадратик из любой клетки, примыкающей к ней по стороне. Можно ли с помощью таких операций поменять местами числа 14 и 15?

2. Докажите, что в полном ориентированном графе существует гамильтонов путь (то есть путь, проходящий через каждую вершину ровно один раз).

3. В графстве n усадеб, каждые две из которых соединены дорогой. Эксцентричный джентльмен, которого назначили начальником ГАИ графства, решил установить на всех дорогах одностороннее движение так, чтобы, выехав из какой-либо усадьбы, в нее больше нельзя было вернуться. а) Докажите, что он может это сделать. б) Сколькими способами он может осуществить свое намерение?

4. Клетки бесконечной в одну сторону клетчатой полоски занумерованы по порядку слева направо, начиная с 1. В начале в первой и второй клетках лежит по монете. Если монета лежит в k-й клетке, ее можно сдвинуть на k пустых клеток вправо. Докажите, что для каждого натурального N можно поставить монету в N-ю клетку.

5. Петя и Вася придумали десять многочленов пятой степени. Затем Вася по очереди называл последовательные натуральные числа (начиная с некоторого), а Петя каждое названное число подставлял в один из многочленов по своему выбору и записывал полученные значения на доску слева направо. Оказалось, что числа, записанные на доске, образуют арифметическую прогрессию. Какое максимальное количество чисел мог назвать Вася?

6. У каждого из чисел от $9 \cdot 10^n$ до $12 \cdot 10^n$ выбрали делитель, меньший его самого. Докажите, что хотя бы два из этих делителей совпадают.

7. Числа x, y, a, b, c, d целые, $(x, y) = 1$. Докажите, что $(ax + by, cx + dy)$ делит $ad - bc$.

8. Натуральные числа d и d', $d' > d$ – делители натурального числа n. Докажите, что $d' > d + \frac{d^2}{n}$.