Серия 1: индукция и пр.

1. При каких натуральных n числа от 1 до n можно записать в таком порядке, чтобы ни для каких двух чисел m и k между ними не было числа $(m+k)/2$?

2. Докажите, что любое целое положительное число можно представить в виде $3^{u_1}\cdot 2^{v_1}+3^{u_2}\cdot 2^{v_2}+\ldots+3^{u_k}\cdot 2^{v_k}$, где $u_1>u_2>\ldots>u_k\geqslant 0$ и $0\leqslant v_1<v_2<\ldots<v_k$ – целые числа.

3. Назовем изящным разбиение натурального числа на слагаемые, каждое из которых является степенью двойки и используется не более двух раз. У каких натуральных чисел количество изящных разбиений четно? (Разбиения, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются за одно).

4. (Теорема об инверсиях). Докажите, что любая транспозиция меняет четность числа инверсий.

5. В некотором городе разрешены только тройные обмены квартир. Можно ли, производя такие обмены, в результате обменять две квартиры, оставив во всех остальных квартирах их прежних обитателей?

6. Докажите, что количество перестановок n элементов, разбивающихся на k циклов, равно количеству способов выписать числа от 1 до n в ряд в таком порядке, чтобы нашлось ровно k чисел, каждое из которых больше всех написанных перед ним.

7. Докажите, что последовательность $a_n=d(n^2+1)$ не является (строго) монотонной ни с какого места.

8. Докажите, что количество делителей вида $4k+1$ у любого натурального числа не меньше количества делителей вида $4k+3$.