Вступительные задачи

1. а) Докажите, что если числа $a+b$ и a^2+b делятся на m, то a^n+b также делится на m при любом n (a, b и m – некоторые натуральные числа).

б) Докажите, что если $f(n)=a^n+b_0+b_1n+\ldots+b_kn^k$ делится на m при $n=1, n=2, \ldots, n=k+1, n=k+2$, то $f(n)$ делится на m при любом n ($a, b_0, b_1, \ldots, b_k, m$ – некоторые натуральные числа).

2. Пусть n – составное число. Числа $a_1<a_2<\ldots<a_k$ – все числа из множества $\{1,2,3,\ldots,n\}$, не взаимно простые с n. Пусть $b_1,\ldots,b_k$ – перестановка чисел $a_1,\ldots,a_k$. Докажите, что найдутся индексы i и j, $1\leqslant i<j\leqslant k$ такие, что a_ib_i и a_jb_j дают одинаковые остатки при делении на n.

3. Обозначим через $S(n)$ сумму всех натуральных делителей числа n, отличных от n. Докажите, что уравнение $S(n)=1000000$ имеет а) меньше 1500000, б) меньше 1000000 решений.

4. Функции $f(x)-x$ и $f(x^2)-x^6$ определены при всех положительных x и возрастают. Докажите, что функция $f(x^3)-\frac{\sqrt{3}}{2}x^6$ также возрастает при всех положительных x.

5. Какое максимальное число действительных решений может иметь уравнение $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i|x-a_i|=0$, если известно, что множество его решений в действительных числах конечно?

6. Пусть p – простое, $p>5$ и $X=\{p-n^2|n\in\mathbb{N}\}$. Докажите, что X содержит два различных целых x и y таких, что $x\neq 1$ и $x|y$.

7. На книжной полке в каком-то порядке стоят книги 20-томного собрания сочинений. Библиотекарь хочет расставить эти тома в монотонном порядке - с 1-го по 20-й слева направо. За один прием библиотекарь меняет местами любой том, стоящий не на своем месте, с томом, занимающим его место. Докажите, что число таких операций, нужное для упорядочения томов, не зависит от последовательности действий библиотекаря.

8. По законам страны Анчурии телефонные номера всех абонентов должны состоять из 10 ненулевых цифр, а у любых двух абонентов номера должны различаться хотя бы в двух цифрах, либо ровно в одной цифре, но хотя бы на 2. Какое наибольшее количество телефонных номеров может быть в Анчурии?

9. Натуральное число n назовем *почти квадратом*, если n можно представить в виде $n=ab$, где a и b – натуральные числа, причем $a\leqslant b\leqslant 1{,}01a$. Докажите, что для бесконечно многих натуральных m среди чисел m, $m+1$, $m+2$, …, $m+198$ нет почти квадратов.

10. В лесу mn тропок и несколько полян. Каждая тропка соединяет две поляны. Известно, что тропки можно раскрасить в m цветов так, чтобы на каждой поляне сходились тропки разных цветов. Докажите, что это можно сделать, покрасив в каждый цвет ровно n тропок.