Серия 26. Новые встречи с геометрией.

1. Дан параллелограмм $ABCD$. На прямых AB и BC выбраны точки соответсвенно H и K так, что треугольники KAB и HCB равнобедренные ($KA = AB$ и $HC = CB$). Докажите, что треугольник KDH – тоже равнобедренный.

2. а) Пусть M и N – точки касания окружности, вписанной в треугольник ABC, со сторонами AB и AC, P – точка пересечения прямой MN с биссектрисой угла B. Докажите, что угол BPC – прямой.

б) Докажите более общий факт: если точка O, расположенная внутри треугольника ABC, такова, что $\angle BOC - \angle BAO = 90^\circ$, M и N – основания перпендикуляров, опущенных из точки O на стороны AB и AC, P – точка пересечения прямых BO и MN, то $\angle BPC = 90^\circ$.

3. На сторонах треугольника ABC, как на основаниях, построены равнобедренные треугольники AB_1C, BA_1C и AC_1B. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек A, B и C соответственно на прямые B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1, пересекаются в одной точке.

4. Опустим из любой точки P биссектрисы угла A треугольника ABC перпендикуляры PA_1, PB_1, PC_1 на его стороны BC, CA и AB соответственно. Пусть R – точка пересечения прямых PA_1 и B_1C_1. Докажите, что прямая AR делит сторону BC пополам.

5. Пусть E, F, G – такие точки на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC, для которых $\frac{AE}{EB} = \frac{BF}{FC} = \frac{CG}{GA} = k$, где $0 < k < 1$. Найдите отношение площади треугольника, образованного прямыми AF, BG и CE, к площади треугольника ABC.

6. Две точки P и Q движутся по двум пересекающимся прямым с одинаковой постоянной скоростью v. Докажите, что на плоскости существует такая неподвижная точка A, расстояния от которой до точек P и Q в любой момент времени равны.

7. Прямая ℓ_1 пересекает стороны a, b и c треугольника (или их продолжения) в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно; прямая ℓ_2 пересекает их в точках A_2, B_2 и C_2. Докажите, что если точки A_1 и A_2 симметричны относительно середины стороны a, а точки B_1 и B_2 симметричны относительно середины стороны b, то точки C_1 и C_2 симметричны относительно середины стороны c.