

Серия 8: просто красивые задачи.

1. Квадрат разбит на несколько прямоугольников со сторонами, параллельными сторонам квадрата. Для каждого прямоугольника вычислили отношение длины меньшей стороны к длине большей. Докажите, что сумма полученных чисел не меньше 1.
2. В выпуклом четырехугольнике сумма расстояний от любой точки внутри четырехугольника до четырех прямых, на которых лежат его стороны, постоянна. Докажите, что этот четырехугольник – параллелограмм.
3. В каждом из двух правильных конгруэнтных 16-угольников отмечено по семь вершин. Докажите, что можно так наложить эти многоугольники друг на друга, чтобы не менее четырех отмеченных вершин одного многоугольника совпали с отмеченными вершинами другого.
4. $1 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$ – последовательность натуральных чисел такая, что $a_{n+a_n} = 2a_n$ при любом натуральном n . Докажите, что найдется такое натуральное число c , что $a_n = n + c$ для любого n .
5. Пусть p_1, p_2, p_3 – квадратные трехчлены с положительными старшими коэффициентами. Докажите, что если каждые два из них имеют общий корень, то квадратный трехчлен $p_1 + p_2 + p_3$ имеет корень.
6. В треугольнике ABC величина угла C в два раза больше величины угла A и $|AC| = 2|BC|$. Докажите, что этот треугольник прямоугольный.
7. Пишется последовательность цифр, первыми четырьмя членами которой являются 1, 9, 8, 2, а каждая следующая цифра является последней цифрой суммы четырех предыдущих. Встретится ли в этой последовательности четверка подряд идущих цифр 3, 0, 4, 4?