Серия 5: геометрия и хчл.

1. Докажите, что касательные к описанной окружности (неравнобедренного) треугольника в двух его вершинах пересекаются на продолжении его симедианы (то есть на прямой, симметричной медиане относительно биссектрисы, проведенной из той же вершины).

2. В треугольнике ABC проведена биссектриса внутреннего угла AD. Прямая ℓ касается описанной окружности в точке A. Докажите, что прямая, проведенная через D параллельно ℓ, касается вписанной окружности.

3. В треугольнике ABC проведена прямая, пересекающая стороы AC и BC в точках M и N так, что $|MN| = |AM| + |BN|$. Докажите, что все такие прмые касаются одной и той же окружности.

4. В треугольнике ABC выполнено соотношение $BC = \frac{1}{2}(AB + AC)$. Докажите, что

а) биссектриса угла A перпендикулярна отрезку, соединяющему центры вписанной и описанной окружностей;

б) Точка A, середины сторон AB и AC и центры вписанной и описанной окружностей лежат на одной окружности.

5. Пусть p_1, p_2, p_3 – квадратные трехчлены с положительными старшими коэффициентами. Докажите, что если каждые два из них имеют общий корень, то квадратный трехчлен $p_1 + p_2 + p_3$ имеет корень.

6. a, b, c – различные числа, причем $c \neq 0$. Длказать, что если уравнения $x^2 + ax + bc = 0$ и $x^2 + bx + ca = 0$ имеют ровно один общий корень, то другие корни этих уравнений удовлетворяют уравнению $x^2 + cx + ab = 0$.

7. Среди всех многочленов вида $x^2 + ax + b$ найти такой, у которого максимум модуля на отрезке $[-1; 1]$ минимален.