Серия 4, с виду нормальная, а по содержанию никакая.

1. Дана функция $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n}$.

а) Докажите, что ее можно представить в виде $P(x + \frac{1}{x})$, где $P(x)$ – некоторый многочлен.

б) Докажите, что если коэффициенты a_i – целые, то в качестве $P(x)$ может быть взят многочлен с целыми коэффициентами.

в) Докажите, что многочлен $P(x)$ – единственный.

2. Многочлен $P(x)$ 4-й степени принимает целые значения при всех целых x. Докажите, что все коэффициенты многочлена $24P(x)$ – целые.

3. Решите уравнение $x = 1 - 2020(1 - 2020x^2)^2$.

4. Разложите число $989 \cdot 1001 \cdot 1007 + 320$ на простые множители. (Излишне говорить, что электроникой пользоваться не надо.)

5. а) Существует ли бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ такая, что для любого натурального k последовательность $a_1 + k, a_2 + k, a_3 + k, \ldots$ содержит конечное число простых чисел (возможно, ни одного)?

б) Существует ли бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ такая, что для любой возрастающей арифметической прогрессии $b_1, b_2, b_3, \ldots$ с натуральными членами последовательность $a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots$ содержит конечное число простых чисел (возможно, ни одного)?

6. Многочлен $P(x)$ третьей степени, у которого есть хотя бы два разных вещественных корня, при каждом вещественном t удовлетворяет условию: если $P(t) = 0$, то $P(t + 1) = 1$.

а) Найдите все такие многочлены, у которых один из корней равен 7.

б) Найдите все такие многочлены.

7. Найдите сумму коэффициентов при а) четных, б) нечетных степенях x в многочлене $(x^2 + x + 1)^{2020}$.