Серия 48, геометрическая

1. На сторонах OB_1 и OB_2 угла с вершиной O взяты точки A_1 и A_2 такие, что $OA_1 = OA_2$ и $A_1B_1 = A_2B_2$. Докажите, что точка O_1 пересечения отрезков A_1B_2 и A_2B_1 лежит на биссектрисе угла.

2. Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O. Докажите, что если $OA = OC$, то треугольник ABC – равнобедренный.

3. В четырехугольниках $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ соответственно равны отрезки: AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CD и C_1D_1, DA и D_1A_1, AC и A_1C_1. Верно ли, что $BD = B_1D_1$?

4. а) Из точки внутри правильного треугольника опустили перпендикуляры на стороны. Докажите, что сумма длин перпендикуляров не зависит от выбора точки и равна высоте треугольника.

б) Из точки на основании равнобедренного треугольника опустили перпендикуляры на боковые стороны. Докажите, что сумма длин перпендикуляров не зависит от выбора точки и равна высоте треугольника.

5. Дано четыре различных натуральных числа. Известно, что какие-то три из шести попарных сумм этих чисел равны 13, 14 и 15. Найдите наименьшее значение, которое может принимать сумма четырёх таких чисел.

6. Единичный квадрат разбит на прямоугольники, сумма периметров которых равна a. Докажите, что его можно разбить на прямоугольники, сумма периметров которых равна $a + 5$.

7. Различные положительные числа a и b удовлетворяют соотношению $\frac{a}{a^2+a+1} = \frac{b}{b^2+b+1}$. Докажите неравенство $a^2 + b^2 \geqslant 2$.