Серия 21, с новым геометрическим преобразованием

1. Натуральные числа a, b и c таковы, что $ab + bc = ca$. Докажите равенства $[a, b] = [b, c] = [c, a]$ (квадратные скобки обозначают наименьшее общее кратное).

2. В таблице $2n \times 2n$ расставлены натуральные числа, не превосходящие 10. Известно, что числа, расположенные в клетках, имеющих общую сторону или вершину, взаимно просты. Докажите, что какое-то число встречается в таблице не менее чем $2n^2/3$ раз.

3. Деревни Альфино и Бетино расположены по разные стороны от молочной реки с параллельными прямолинейными кисельными берегами. В каком месте нужно построить мост через молочную реку, чтобы путь из Альфино в Бетино был кратчайшим?

4. Докажите, что число $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}$ – не целое.

5. Дано натуральное число a. Найдите наибольшее такое натуральное число n, что количество чисел, кратных a и не больших n, равно количеству чисел, кратных $a + 1$ и не больших n.

6. На доске написаны натуральные числа p и q. Разрешается увеличивать оба числа на 1, либо, если одно из чисел является точным квадратом, извлечь из него корень. При каких исходных p и q можно несколькими такими операциями добиться, чтобы числа стали равными?

7. Существуют ли простое число p и целые неотрицательные числа x, y, z, удовлетворяющие уравнению $(12x + 5)(12y + 7) = p^z$?