

### Серия 10, с окружностями.

1. Можно ли вписать в окружность выпуклый семиугольник  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$  с углами  $\angle A_1 = 140^\circ$ ,  $\angle A_2 = 120^\circ$ ,  $\angle A_3 = 130^\circ$ ,  $\angle A_4 = 120^\circ$ ,  $\angle A_5 = 130^\circ$ ,  $\angle A_6 = 110^\circ$ ,  $\angle A_7 = 150^\circ$ ?

2. Докажите, что для любого треугольника существует *внеписанная окружность*, касающаяся данной его стороны и продолжений двух других сторон.

*В задаче 3  $a, b, c$  – стороны треугольника  $ABC$  (угадайте, какие где?),  $p = \frac{a+b+c}{2}$  – полупериметр.*

3. Окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , касается сторон в точках  $A_1, B_1, C_1$ . Докажите, что  $AB_1 = AC_1 = p - a$ .

4. Постройте центр данной окружности а) с помощью циркуля и линейки, б) с помощью угольника (то есть прямого угла, который можно помещать на плоскости произвольным образом).

5. Разложите на множители многочлен  $x^8 + x + 1$ .

6. Последовательность  $x_1, x_2, x_3, \dots$  задана правилами:  $x_1 = 2, x_2 = 3, x_{n+1}$  — наибольший простой делитель числа  $x_1x_2 \dots x_n + 1$  при всех  $n \geq 2$ . Докажите, что  $x_n \neq 5$  ни при каком  $n$ .

7. Злоумышленник переставил кнопки в лифте 13-этажного дома. Теперь номер этажа, на который отправляется лифт при нажатии на кнопку, не всегда совпадает с числом, указанным на кнопке. Маньяк Петя решил ездить на лифте таким способом: находясь на любом этаже, нажимать кнопку с номером этого этажа (из-за чего лифт, возможно, перемещается на другой этаж). Известно, что с какого бы этажа ни начать, после 1313 таких действий лифт снова оказывается на исходном этаже. Докажите, что Петя может с любого этажа попасть на любой.