

Серия 59(в): нагнали!

1. На клетках таблицы 4×4 , кроме правой нижней, расставлены (слева направо в строчках и сверху вниз) квадратики с написанными на них числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 14. Разрешается передвинуть на свободную клетку квадратик из любой клетки, примыкающей к ней по стороне. Можно ли с помощью таких операций поменять местами числа 14 и 15?
2. Две параллельные прямые пересекают на сторонах угла с вершиной O отрезки A_1A_2 и B_1B_2 . Докажите, что треугольники OA_1B_2 и OA_2B_1 равновелики.
3. На плоскости отмечены 8 точек – все вершины и середины сторон некоторого квадрата. Сколько существует прямоугольных треугольников с вершинами в отмеченных точках?
4. Сумма 100 целых чисел равна нулю. Докажите, что из них можно по крайней мере 99 способами выбрать два числа, сумма которых неотрицательна.
5. (Теорема Фалеса)
 - а) Докажите рассмотрением площадей, что если два отрезка, отсекаемые тремя параллельными прямыми на одной из сторон угла, находятся в данном отношении, то отрезки, отсекаемые ими на другой стороне угла, находятся в том же отношении (мы предполагаем, что прямые пересекают обе стороны угла);
 - б) Докажите без помощи площадей, что если два отрезка, отсекаемые тремя параллельными прямыми на одной из сторон угла, равны, то отрезки, отсекаемые ими на другой стороне угла, также равны;
 - в) Докажите без помощи площадей, что если два отрезка, отсекаемые тремя параллельными прямыми на одной из сторон угла, находятся в данном рациональном отношении, то отрезки, отсекаемые ими на другой стороне угла, находятся в том же отношении.
6. Десять человек пришли в гости в галошах. Уходили они по одному, и каждый надевал произвольную пару галош, в которую он мог влезть (то есть не меньшего размера, чем его собственная). Какое наибольшее число людей могло остаться без галош?
7. Решите в целых числах уравнение $a^2 + 2ab + 2b^2 = 13$.