

Серия 59(а): всё и сразу.

1. На клетках таблицы 4×4 , кроме правой нижней, расставлены (слева направо в строчках и сверху вниз) квадратики с написанными на них числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 14. Разрешается передвинуть на свободную клетку квадратик из любой клетки, примыкающей к ней по стороне. Можно ли с помощью таких операций поменять местами числа 14 и 15?
2. Все натуральные числа от 1000 до 2000 выписаны подряд: 100010011002...19992000. Сколько раз в этом ряду после нечетной цифры идет четная?
3. На плоскости отмечены 8 точек – все вершины и середины сторон некоторого квадрата. Сколько существует прямоугольных треугольников с вершинами в отмеченных точках?
4. Сумма 100 целых чисел равна нулю. Докажите, что из них можно по крайней мере 99 способами выбрать два числа, сумма которых неотрицательна.
5. В круге какого наименьшего диаметра могут найтись четыре точки A, B, C, D такие, что $AB = 3, BC = 2, CD = 4, DA = 5$?
6. Десять человек пришли в гости в галошах. Уходили они по одному, и каждый надевал произвольную пару галош, в которую он мог влезть (то есть не меньшего размера, чем его собственная). Какое наибольшее число людей могло остаться без галош?
7. Решите в целых числах уравнение $a^2 + 2ab + 2b^2 = 13$.