

Серия 42(а), эпонимическая.

1. Точку M симметрично отразили от сторон заключающего ее угла, то есть построили такие точки M' и M'' , что отрезки MM' и MM'' перпендикулярны сторонам угла и делятся ими пополам. Докажите, что часть отрезка $M'M''$, высекаемая на нем углом, составляет менее половины этого отрезка.

2. На биссектрисе угла выбраны точки A и B . M – основание перпендикуляра из A на одну сторону угла, а N – основание перпендикуляра из B на другую сторону угла. Докажите, что точки M и N равноудалены от середины отрезка AB .

3. (Неравенство Бернулли). Докажите, что $(1 + x)^n > 1 + nx$ при всех положительных x и при всех натуральных $n > 1$.

4. Определим числа Фибоначчи равенствами $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Докажите, что $F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$.

5. Отрезок длины 65 разбит на отрезки, длина каждого из которых – натуральное число, не большее 4. Докажите, что можно выбрать несколько из них так, чтобы сумма их длин равнялась 32 или 33.

6. Докажите, что множество всех натуральных чисел можно раскрасить в два цвета так, чтобы для каждого натурального числа x числа x и $2x$ были раскрашены в разные цвета.

7. Можно ли разбить непересекающимися диагоналями на треугольники а) 2004-угольник, б) 2018-угольник так, чтобы из каждой вершины выходило чётное число диагоналей?